



教育图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

30⁺年专注教育行业

全品 高考复习方案

主编：肖德好



AI智慧教辅

索取二维码
贴此处
激活享受服务

AI时代就该用AI学习
遇到问题快扫我

 延边教育出版社

CONTENTS 目录



讲课智能体



扫码添加全品伴学师
获取学习服务

01 第一单元 集合与常用逻辑用语

- 第 1 讲 集合 001
- 第 2 讲 常用逻辑用语 005

02 第二单元 不等式

- 第 3 讲 不等关系与不等式 009
- 第 4 讲 基本不等式及其应用 012
- 第 5 讲 一元二次不等式及其解法 015

03 第三单元 函数

- 第 6 讲 函数的概念及其表示 019
- 第 7 讲 函数的单调性和最值 023
- 第 8 讲 函数的奇偶性与周期性 027
- 第 9 讲 二次函数与幂函数 031
- 第 10 讲 指数与指数函数 036
- 第 11 讲 对数与对数函数 040
- 第 12 讲 函数的图象 046
- 第 13 讲 函数的零点与方程的解 050
- 第 14 讲 函数模型及其应用 053

04 第四单元 导数

- 第 15 讲 导数的概念及其运算 058
- 第 16 讲 导数与函数的单调性 062
- 第 17 讲 导数与函数的极值、最值 067

培优专题一 导数 072

- 第 1 课时 导数与不等式恒(能)成立问题 072
- 第 2 课时 导数与函数的零点 076
- 第 3 课时 隐零点问题 080

05 第五单元 三角函数与解三角形

第 18 讲	任意角和弧度制以及任意角的三角函数	083
第 19 讲	同角三角函数的基本关系式与诱导公式	087
第 20 讲	两角和与差的正弦、余弦和正切公式	091
第 21 讲	简单的三角恒等变换	094
第 22 讲	三角函数的图象与性质	098
第 23 讲	函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 及三角函数模型的应用	102
第 24 讲	余弦定理、正弦定理	109
培优专题二 解三角形综合应用		114

06 第六单元 数列

第 25 讲	数列的概念与简单表示法	118
第 26 讲	等差数列及其前 n 项和	122
第 27 讲	等比数列及其前 n 项和	126
第 28 讲	数列求和	130
培优专题三 数列综合		134

07 第七单元 平面向量与复数

第 29 讲	平面向量的概念及其线性运算	138
第 30 讲	平面向量基本定理及坐标表示	142
第 31 讲	平面向量的数量积	144
第 32 讲	复数的概念及运算	149

08 第八单元 立体几何

第 33 讲	空间几何体的结构特征、表面积和体积	152
第 34 讲	空间点、直线、平面之间的位置关系	158
第 35 讲	直线、平面平行的判定及性质	162
第 36 讲	直线、平面垂直的判定及性质	168
第 37 讲	空间向量及其运算	173
第 38 讲	空间角	178
第 39 讲	空间距离	183
培优专题四 立体几何		186

09 第九单元 平面解析几何

第 40 讲	直线的倾斜角与斜率、直线的方程	190
第 41 讲	两直线的位置关系	193
第 42 讲	圆的方程	197
第 43 讲	直线与圆、圆与圆的位置关系	201
第 44 讲	椭圆	205
第 45 讲	双曲线	210
第 46 讲	抛物线	214
第 47 讲	直线与圆锥曲线的位置关系	218
培优专题五	圆锥曲线	222
第 1 课时	定点、定值及共线问题	222
第 2 课时	最值及范围问题	225
第 3 课时	证明及探索性问题	229

10 第十单元 排列与组合、二项式定理、概率

第 48 讲	两个计数原理、排列与组合	233
第 49 讲	二项式定理	238
第 50 讲	随机事件与概率、古典概型	241
第 51 讲	随机事件的相互独立性、条件概率与全概率公式	246
第 52 讲	离散型随机变量及其分布	249
第 53 讲	二项分布、超几何分布、正态分布	255

11 第十一单元 统计

第 54 讲	随机抽样	261
第 55 讲	用样本估计总体	266
培优专题六	概率与统计	272
第 56 讲	成对数据的统计分析	277

作业手册 [单独成册 P283~P440]

参考答案 [单独成册 听课手册/P441~P520 作业手册/P521~P600]



第 1 讲 集合

【课标要求】

1. 通过实例,了解集合的含义,理解元素与集合的属于关系.
2. 针对具体问题,能在自然语言和图形语言的基础上,用符号语言刻画集合.
3. 在具体情境中,了解全集与空集的含义.
4. 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.
5. 理解两个集合的并集与交集的含义,能求两个集合的并集与交集.
6. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义,能求给定子集的补集.
7. 能使用 Venn 图表达集合的基本关系与基本运算,体会图形对理解抽象概念的作用.



讲课智能体

课前基础巩固

知识聚焦

1. 集合及其表示方法

- (1) 集合元素的性质: _____、_____、无序性.
- (2) 集合与元素的关系: ①属于,记为 _____; ②不属于,记为 _____.
- (3) 集合的表示方法: 列举法、_____、_____和区间法.
- (4) 常见数集及记法

数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	_____	_____	_____	_____	_____

2. 集合间的基本关系

	文字语言	符号语言	记法
子集	集合 A 中 _____ 都是集合 B 中的元素	$x \in A \Rightarrow x \in B$	$A \subseteq B$ 或 _____
真子集	集合 A 是集合 B 的子集,并且 B 中 _____ 有一个元素不属于 A	① $A \subseteq B$; ② $\exists x \in B, x \notin A$	A _____ B 或 $B \supsetneq A$
相等	集合 A, B 中的元素完全 _____	$A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$	_____
空集	_____ 任何元素的集合,空集是任何集合的子集	① $\forall x, x \notin \emptyset$; ② $\emptyset \subseteq A$	\emptyset

3. 集合的基本运算

表示运算	文字语言	符号语言	图形语言	记法
交集	由所有属于集合 A _____ 属于集合 B 的元素组成的集合	$\{x x \in A, \text{_____} x \in B\}$		_____
并集	由所有属于集合 A _____ 属于集合 B 的元素组成的集合	$\{x x \in A, \text{_____} x \in B\}$		_____
补集	全集 U 中 _____ 属于集合 A 的所有元素组成的集合	$\{x x \in U, \text{且 } x \text{_____} A\}$		_____

4. 集合的运算性质

(1) 交集的运算性质: $A \cap B = B \cap A$; $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$; $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$.

(2) 并集的运算性质: $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$; $A \cup A = A$; $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$; $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}} \Leftrightarrow B \subseteq A$.

(3) 补集的运算性质: $A \cup (\complement_U A) = U$; $A \cap (\complement_U A) = \underline{\hspace{2cm}}$; $\complement_U(\complement_U A) = \underline{\hspace{2cm}}$;
 $\complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$; $\complement_U(A \cap B) = \underline{\hspace{2cm}} \cup \underline{\hspace{2cm}}$.

◆◆ 常用结论

1. 集合子集的个数: 集合 A 中有 n 个元素, 则集合 A 有 2^n 个子集、 $2^n - 1$ 个真子集、 $2^n - 1$ 个非空子集、 $2^n - 2$ 个非空真子集.
2. 子集的传递性: 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ (真子集也满足).
3. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow (\complement_U A) \supseteq (\complement_U B)$.
4. 集合元素个数: $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$ (常用在实际问题中).

课前演练

1. 已知集合 $A = \{0, 1, x^2 - 5x\}$, 若 $6 \in A$, 则实数 x 的值为 .
2. 已知集合 $C = \{(x, y) \mid y = x\}$, 集合 $D = \{(x, y) \mid \begin{cases} 2x - y = 1, \\ x + 4y = 5 \end{cases}\}$, 则集合 D 用列举法表示为 , 且 C D (从“=”“ \subseteq ”“ \supseteq ”中选一个合适的填入).
3. 已知集合 $U = \{x \mid |x| > 1\}$, $A = \{x \mid x \geq 2\}$, 则 $\complement_U A =$.
4. 已知集合 $\{1, a\} = \{a, a^2\}$, 则实数 $a =$.
5. 已知集合 $A = \{2, 3\}$, $B = \{x \mid ax - 1 = 0\}$, 若 $A \cap B = B$, 则实数 a 的所有可能取值组成的集合为 .

课堂考点探究

探究点一 集合的概念

例 1 [2025 · 北京二十中测试] 已知集合 $A = \{-4, 2a - 1, a^2\}$, 若 $1 \in A$, 则 a 的取值集合为 ()

- A. $\{0\}$ B. $\{1\}$ C. $\{1, -1\}$ D. $\{-1\}$

[课堂笔记]

◆◆ 总结反思

研究集合问题关键有三点: 一是要明确构成集合的元素是什么; 二是看元素满足的限制条件是什么; 三是根据元素特征构造关系式解决相应问题. 注意: 含有字母的集合, 在求出字母的值后, 要注意检验集合中的元素是否满足互异性.

对点演练 1

1. [2023 · 东城一模] 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 2 < 0\}$, 且 $a \in A$, 则 a 可以为 ()

- A. -2 B. -1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\sqrt{2}$

2. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 已知集合 $\{1, a, \frac{b}{a}\} = \{0, a^2, a + b\}$, 则 $(a + b)^{2026} =$.

探究点二 集合间的基本关系

例 2-1 在下列选项中,能正确表示集合 $A = \{-3, 0, 3\}$ 和 $B = \{x | x^2 + 3x = 0\}$ 的关系的是()

- A. $A = B$ B. $A \supseteq B$ C. $A \subseteq B$ D. $A \cap B = \emptyset$

例 2-2 已知集合 $A = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 则()

- A. $A \cap B = \emptyset$ B. $A \cup B = \mathbf{Z}$ C. $A \subseteq B$ D. $B \subseteq A$

[课堂笔记]

◆◆ 总结反思

(1) 若 $B \subseteq A$, 则应分 $B = \emptyset$ 和 $B \neq \emptyset$ 两种情况讨论.

(2) 已知两个集合间的关系求参数时, 关键是将两个集合间的关系转化为元素或区间端点间的关系, 进而转化为参数满足的关系. 解决这类问题常常要合理利用数轴、Venn 图, 化抽象为直观进行求解.

对点演练2

1. [2025 · 北京清华大学附中测试] 已知集合 $M = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$, $N = \{x | x^2 > a\}$, 若 $N \subseteq M$, 则实数 a 的取值范围为()
- A. $(1, 2)$ B. $[1, +\infty)$
C. $[2, +\infty)$ D. $[4, +\infty)$
2. [2023 · 西城期末] 已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} | 0 < x < 5\}$, 则满足条件 $A \subseteq M \subseteq B$ 的集合 M 的个数为()
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

探究点三 集合的基本运算

► 角度 1 集合的运算

例 3-1 [2025 · 海淀二模] 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | a < x < 2\}$. 若 $a \in \mathbf{Z}$, 且 $A \cap B = \{1\}$, 则 $a =$ ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

例 3-2 [2022 · 北京卷] 已知全集 $U = \{x | -3 < x < 3\}$, 集合 $A = \{x | -2 < x \leq 1\}$, 则 $\complement_U A =$ ()

- A. $(-2, 1]$ B. $(-3, -2) \cup [1, 3)$
C. $[-2, 1)$ D. $(-3, -2] \cup (1, 3)$

[课堂笔记]

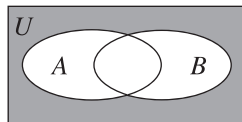
◆◆ 总结反思

对于已知集合的运算, 可根据集合的交集、并集和补集的定义直接求解, 必要时可结合数轴以及 Venn 图求解.

对点演练3

1. [2024 · 东城一模] 如图所示, U 是全集, A, B 是 U 的子集, 则阴影部分所表示的集合是()

- A. $A \cap B$ B. $A \cup B$
C. $\complement_U (A \cap B)$ D. $\complement_U (A \cup B)$



2. [2025·延庆一模] 已知集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | \log_3 x < 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $[0, 3]$ B. $[0, 3)$ C. $(0, 3)$ D. $(0, 3]$

► 角度2 利用集合的运算求参数的值(范围)

例4 [2025·海淀期末] 已知关于 x 的不等式 $|x - a| \leq 2$ 的解集为 $A = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, 集合 $B = \{x | m - 3 \leq x \leq m + 3\}$.

(1) 求实数 a 的值.

(2) 从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求实数 m 的取值范围.

条件①: $[-2, 4] \subseteq (A \cup B)$;

条件②: $A \cap B = A$.

注: 如果选择多个条件分别作答, 按第一个解答计分.

◆◆ 总结反思

利用集合的运算求参数的值或取值范围的方法

(1) 与不等式有关的集合, 一般利用数轴解决, 要注意端点值能否取到;

(2) 若集合中的元素能一一列举, 则一般先用观察法得到不同集合中元素之间的关系, 再列方程(组)求解.

对点演练4

[2025·石景山期末] 已知集合 $A = \{x | a \leq x \leq a + 3\}$, $B = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 6\}$.

(1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值范围.

探究点四 集合语言的运用

例5 [2025·朝阳期中] 数学家康托尔创立了集合论, 集合论的产生丰富了现代计数方法. 记 $|S|$ 为集合 S 的元素个数, $\varphi(S)$ 为集合 S 的子集个数, 若集合 A, B, C 满足① $|A| = 99, |B| = 100$;

② $\varphi(A) + \varphi(B) + \varphi(C) = \varphi(A \cup B \cup C)$. 则 $|A \cap B \cap C|$ 的最大值是()

- A. 99 B. 98 C. 97 D. 96

[课堂笔记]

◆◆ 总结反思

以集合语言为背景的新定义问题,需正确理解新定义(即分析新定义的特点,把新定义所叙述的问题的本质弄清楚),转化成熟知的数学情境,并能够应用到具体的解题过程中,这是破解新定义集合问题的关键所在.

对点演练5

1. 已知 U 是非空数集,若非空集合 A_1, A_2 满足以下三个条件,则称 (A_1, A_2) 为集合 U 的一种真拆分,并规定 (A_1, A_2) 与 (A_2, A_1) 为集合 U 的同一种真拆分.

① $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; ② $A_1 \cup A_2 = U$; ③ $A_i (i=1, 2)$ 的元素个数不是 A_i 中的元素.

则 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的真拆分的种数是()

A. 5 B. 6 C. 10 D. 15

2. [2025·房山调研] 已知由正整数组成的集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{50}\}$, $S(A)$ 表示集合 A 中所有元素的和, $E(A)$ 表示集合 A 中偶数的个数. 若 $S(A) = 2025$, 则 $E(A)$ 的最小值为()

A. 5 B. 7
C. 9 D. 10

第2讲 常用逻辑用语

- 【课标要求】**
- 理解必要条件、充分条件、充要条件的意义,理解性质定理与必要条件的关系、判定定理与充分条件的关系、数学定义与充要条件的关系.
 - 理解全称量词与存在量词的意义,能正确使用存在量词对全称量词命题进行否定,能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定.



讲课智能体

课前基础巩固

知识聚焦

1. 充分条件、必要条件与充要条件的概念

若 $p \Rightarrow q$, 则 p 是 q 的 _____ 条件, q 是 p 的 _____ 条件	
p 是 q 的 _____ 条件	$p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$
p 是 q 的 _____ 条件	$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$
p 是 q 的 _____ 条件	$p \Leftrightarrow q$
p 是 q 的 _____ 条件	$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$

2. 全称量词与存在量词

- (1) 短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫作 _____, 用符号“_____”表示.
- (2) 短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫作 _____, 用符号“_____”表示.
- (3) 含有一个量词的命题的否定:
- 全称量词命题: $\forall x \in M, p(x)$, 它的否定是 _____.
- 存在量词命题: $\exists x \in M, p(x)$, 它的否定是 _____.

3. 常用的正面叙述词语和它的否定词语

正面词语	等于(=)	大于(>)	小于(<)	是
否定词语	不等于(\neq)	不大于(\leq)	不小于(\geq)	不是
正面词语	都是	任意的	所有的	至多有一个
否定词语	不都是	某个	某些	至少有两个
				一个也没有



第3讲 不等关系与不等式



讲课智能体

【课标要求】 梳理等式的性质,理解不等式的概念,掌握不等式的性质.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 两个实数比较大小的方法

$$(1) \text{作差法} \begin{cases} a-b > 0 \Leftrightarrow a \underline{\hspace{1cm}} b, \\ a-b = 0 \Leftrightarrow a \underline{\hspace{1cm}} b, \\ a-b < 0 \Leftrightarrow a \underline{\hspace{1cm}} b. \end{cases}$$

(2) 作商法

$$\begin{cases} \frac{a}{b} > 1 (a \in \mathbf{R}, b > 0) \Leftrightarrow a \underline{\hspace{1cm}} b (a \in \mathbf{R}, b > 0), \\ \frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a \underline{\hspace{1cm}} b (a, b \neq 0), \\ \frac{a}{b} < 1 (a \in \mathbf{R}, b > 0) \Leftrightarrow a \underline{\hspace{1cm}} b (a \in \mathbf{R}, b > 0). \end{cases}$$

2. 等式的性质

(1) 如果 $a=b, b=c$, 那么 $a=c$.

(2) 如果 $a=b$, 那么 $a+c \underline{\hspace{1cm}} b+c, a-c \underline{\hspace{1cm}} b-c$.

(3) 如果 $a=b$, 那么 $ac \underline{\hspace{1cm}} bc, \frac{a}{c} \underline{\hspace{1cm}} \frac{b}{c} (c \neq 0)$.

3. 不等式的性质

(1) 对称性: $a > b \Leftrightarrow \underline{\hspace{1cm}}$ (双向性).

(2) 传递性: $a > b, b > c \Rightarrow a > c$ (单向性).

(3) 可加性: $a > b \Leftrightarrow a+c \underline{\hspace{1cm}} b+c$ (双向性).

(4) 可乘性: $a > b, c > 0 \Rightarrow ac \underline{\hspace{1cm}} bc$;

$a > b, c < 0 \Rightarrow ac \underline{\hspace{1cm}} bc$.

(5) $a > b, c > d \Rightarrow \underline{\hspace{1cm}}$ (单向性).

(6) $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac \underline{\hspace{1cm}} bd$ (单向性).

(7) 乘方法则: $a > b > 0 \Rightarrow a^n \underline{\hspace{1cm}} b^n (n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$ (单向性).

◆◆ 常用结论

1. 若 $a < x < b, c < y < d$, 则 $a-d < x-y < b-c$.

2. 若 $\frac{a}{b} < 1, a, b, m > 0$, 则 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m} < 1$;

若 $\frac{a}{b} > 1, a, b, m > 0$, 则 $\frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m} > 1$.

课前演练

1. 设 $t = a + 2b, s = a + b^2 + 1$, 则 s 与 t 的大小关系是_____.
2. 已知 $2 < a < 3, -2 < b < -1$, 则 $2a + b$ 的取值范围为_____.
3. 下列命题中为真命题的是_____. (填序号)
 - ① 若 $a > b > 0$, 则 $ac^2 > bc^2$;
 - ② 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 > ab > b^2$;
 - ③ 若 $a > b > 0$ 且 $c < 0$, 则 $\frac{c}{a^2} > \frac{c}{b^2}$;
 - ④ 若 $a > b$ 且 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 则 $ab < 0$.
4. 已知 $-1 < x < 4, 2 < y < 3$, 则 $x - y$ 的取值范围是_____.
5. 已知实数 $a \in (-3, 1), b \in (\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$, 则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是_____.

课堂考点探究

探究点一 比较数(式)的大小

例 1-1 已知 $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{7} - \sqrt{3}, c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, 则 a, b, c 的大小关系为()

A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

例 1-2 [2024 · 丰台二模] 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a > b$, 则()

- A. $\frac{1}{a^2+1} < \frac{1}{b^2+1}$ B. $a^2b > ab^2$
- C. $a^2 > ab > b^2$ D. $a > \frac{a+b}{2} > b$

[课堂笔记]

◆◆ 总结反思

- (1) 判断两个式子大小关系的常用方法: 作差法、作商法、不等式性质法、函数单调性法、中间量法、特殊值法等.
- (2) 作差(商)法的一般步骤是: 作差(商), 变形, 定号, 得出结论.

对点演练1

1. [2023 · 大兴期末] 已知 $M = (a + 2)(a - 3), N = 2a(a - 1), a \in \mathbf{R}$, 则 M, N 的大小关系是()

A. $M > N$ B. $M \geq N$ C. $M < N$ D. $M \leq N$
2. 对于任意的 $a, b \in \mathbf{R}$, “ $a > b$ ”是“ $|a| > b$ ”的()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

探究点二 不等式的基本性质

例 2 [2024 · 房山期末] 已知 a, b 均为非零实数, 且 $a > b$, 则下列结论正确的是()

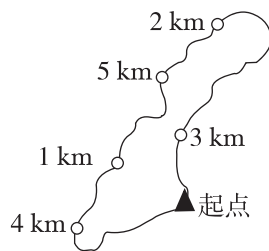
- A. $a^2 > b^2$ B. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ C. $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$ D. $\frac{1}{ab^2} > \frac{1}{a^2b}$

◆◆ 总结反思

涉及实际问题中的大小比较,根据实际意义设元、列式表示出相关量,再用不等式的相关性质进行比较.

对点演练4

[2023·海淀一模] 刘老师沿着某公园的环形道(周长大于1 km)按逆时针方向跑步,他从起点出发,并用软件记录了运动轨迹,他每跑1 km,软件会在运动轨迹上标注出相应的里程数.已知刘老师共跑了11 km,恰好回到起点,前5 km的记录数据如图所示,则刘老师总共跑的圈数为()



- A. 7
B. 8
C. 9
D. 10

第4讲 基本不等式及其应用

【课标要求】 1. 掌握基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a, b > 0)$.

2. 结合具体实例,能用基本不等式解决简单的最大值或最小值问题.



讲读智能体

课前基础巩固

知识聚焦

1. 基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

(1)基本不等式成立的条件:_____.

(2)等号成立的条件:当且仅当_____时取等号.

(3)数_____称为 a, b 的算术平均数;数 \sqrt{ab} 称为 a, b 的几何平均数.

2. 几个重要的不等式

(1) $a^2 + b^2 \geq$ _____ ($a, b \in \mathbf{R}$).

(2) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq$ _____ (a, b 同号).

(3) $ab \leq$ _____ ($a, b \in \mathbf{R}$).

(4) $(\frac{a+b}{2})^2 \leq$ _____ ($a, b \in \mathbf{R}$).

3. 利用基本不等式求最值问题

已知 $x > 0, y > 0$.

(1)如果积 xy 是定值 p ,那么当且仅当 $x = y$ 时, $x + y$ 有最小值,是_____.(简记:积定和最小)

(2)如果和 $x + y$ 是定值 p ,那么当且仅当 $x = y$ 时, xy 有最大值,是_____.(简记:和定积最大)

◆◆ 常用结论

1. 若 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立.

2. 当 $x > 0$ 时, 函数 $y = x + \frac{a}{x} (a > 0)$ 在 $x = \sqrt{a}$ 处取得最小值 $2\sqrt{a}$; 当 $x < 0$ 时, 函数 $y = x + \frac{a}{x} (a > 0)$ 在 $x = -\sqrt{a}$ 处

取得最大值 $-2\sqrt{a}$.

对点演练2

1. [2025·延庆期末] 已知 $x < 0$, 则 $y = 1 + 2x + \frac{2}{x}$ 的最大值为 _____, 当且仅当 $x =$ _____ 时, 等号成立.
2. 若 $x > 1$, 则 $\frac{x^2 + 2x + 2}{x - 1}$ 的最小值为 _____.

» 角度2 常数代换法

例 3-1 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $2x + y = 1$, 则 $\frac{x+y}{xy}$ 的最小值为()

- A. 4
B. $4\sqrt{2}$
C. 6
D. $2\sqrt{2} + 3$

例 3-2 已知正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 则 $ab + 3b$ 的最小值为()

- A. 8
B. 9
C. 10
D. 12

[课堂笔记]

◆◆ 总结反思

常数代换法主要解决形如“已知 $x + y = t$ (t 为常数), 求 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ 的最值”的问题, 通常先将 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ 转化为 $(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}) \cdot \frac{x+y}{t}$, 再用基本不等式求最值.

对点演练3

已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 2$, 则 $\frac{2}{a+1} + \frac{8}{b+1}$ 的最小值是()

- A. 2
B. 4
C. $\frac{9}{2}$
D. 9

» 角度3 消元法

例 4 已知正实数 x, y 满足 $x^2 + 3xy - 2 = 0$, 则 $2x + y$ 的最小值为()

- A. $\frac{2\sqrt{10}}{3}$
B. $\frac{\sqrt{10}}{3}$
C. $\frac{2}{3}$
D. $\frac{1}{3}$

[课堂笔记]

◆◆ 总结反思

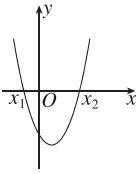
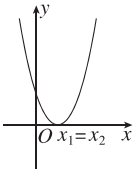
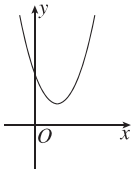
消元法, 即根据条件建立两个量之间的函数关系, 然后代入代数式转化为函数的最值求解. 有时会出现多元的问题, 解决方法是消元后利用基本不等式求解.

对点演练4

[2025·西城期末] 若实数 x, y 满足 $x^2 - xy + 1 = 0$, 则()

- A. $x^2 + y^2 \geq 5$
B. $x^2 + y^2 \leq 4$
C. $|x + y| \leq 3$
D. $|x + y| \geq 2\sqrt{2}$

2. 三个“二次”间的关系

项目	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图象			
方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) 的根	有两个不相等的实数根 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)	有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) 的解集	_____	_____	_____
$ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$) 的解集	_____	_____	_____

3. 解一元二次不等式的一般步骤

(1) 判号: 检查二次项的系数是否为正值, 若是负值, 则利用不等式的性质将二次项系数化为正值.

(2) 求根: 计算判别式 Δ , 求出相应方程的实数根.

① 当 $\Delta > 0$ 时, 求出两根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$ (注意灵活运用因式分解和配方法);

② 当 $\Delta = 0$ 时, 求根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

③ 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无解.

(3) 标根: 将所求得的实数根标在数轴上 (注意两实数根的大小顺序, 尤其是当实数根中含有字母时), 并画出开口向上的抛物线示意图.

(4) 写解集: 根据示意图以及一元二次不等式解集的几何意义, 写出解集.

口诀: 大于零取(根)两边, 小于零取(根)中间.

4. 分式不等式

$$(1) \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0; \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0.$$

$$(2) \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0, \\ g(x) \neq 0; \end{cases} \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \leq 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

◆◆ 常用结论

1. 绝对值不等式 $|x| > a$ ($a > 0$) 的解集为 $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$, 绝对值不等式 $|x| < a$ ($a > 0$) 的解集为 $(-a, a)$.

2. (1) 对于不等式 $ax^2 + bx + c > 0$, 求解时不要忘记讨论 $a = 0$ 时的情形;

(2) 注意区分 $\Delta < 0$ 时, $ax^2 + bx + c > 0$ ($a \neq 0$) 的解集为 \mathbf{R} 还是 \emptyset .

课前演练

1. 不等式 $x^2 - 5x - 6 \geq 0$ 的解集为 _____.

2. 不等式 $x(x+3) < 2(x+3)$ 的解集为 _____.

3. 若一元二次不等式 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$ 对于一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 k 的取值范围为 _____.

4. 若关于 x 的不等式 $-x^2 + bx + c < 0$ 的解集是 $\{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > 4\}$, 则关于 x 的不等式 $cx^2 - bx - 1 > 0$ 的解集是 _____.

016 5. 若关于 x 的不等式 $ax^2 + 2x + 1 < 0$ 有实数解, 则 a 的取值范围是 _____.

